# Najkrajšia matematická rovnica

Dnešný príspevok chcem venovať jednej rovnici, ktorú mnohí matematici považujú za tú najkrajšiu. Paradoxne, v zozname dvanástich najkrajších rovníc (nielen matematických) som ju nenašla. Pravdou totiž je, že jej, na rozdiel od napríklad Pytagorovej vety, bežný človek veľmi nerozumie. Znie ale veľmi jednoducho: *e* umocnené na iπ +1=0. To je podľa mňa tá najkrajšia matematická rovnica.

## Najkrajšie matematické konštanty

Prečo je krásna? Jeden z dôvodov je, že obsahuje hneď niekoľko dôležitých matematických konštánt: nulu, jednotku, *e*, i a π. Prvé dve pozná každý. Jednotka ako základ všetkého počítania. Nula ako koncept, ktorého vznik nebol vôbec jednoduchý. Chápete, urobiť niečo z ničoho. Znak pre nulu kedysi neexistoval. S príchodom pozičnej číselnej sústavy bola nula len prázdne miesto. Neskôr sa zapísala ako malé koliesko (u Mayov prázdna lastúra) a zrazu z nej bolo niečo.

Všeobecne známe je aj číslo π. Nachádza sa v mnohých vtipoch a veľmi často sa zamieňa za hodnotu 3,14. Na to som trošku alergická. π nie je 3,14! To je len približná hodnota. π má v skutočnosti nekonečne veľa desatinných číslic a neexistuje ani zlomok, ktorý by sa rovnal presne číslu π. Takže ani 22/7 nie je π, ale odhad je to dobrý. To sa musí Archimedovi uznať. On si bol vedomý, že je to približná hodnota. Dokonca vedel aj, že je o niečo väčšia ako samotné π. O čísle π by sa dala napísať celá kniha. A veru, že sa aj nejaké napísali. 

Ešte je tam Eulerovo číslo *e*, ktoré je, podobne ako π, iracionálne. (Má nekonečne veľa desatinných číslic, nedá sa zapísať ako zlomok.) Číslo e je približne 2,718. O ňom by sa tiež dalo napísať veľmi veľa. Spomeniem len exponenciálnu funkciu, pretože práve tá súvisí s rovnicou, o ktorej je tento text. Exponenciálna funkcia je funkcia $e$ na $x$-tú. Zaujímavé na nej je to, že je imúnna voči derivovaniu a integrovaniu. Takže jej derivácia je zasa $e$ na $x$-tú. Samozrejme, ak derivujeme podľa $x$. V tom spočíta tiež jeden známy vtip.

Potom tam máme $i$. Toto $i$ sa nazýva imaginárna jednotka a dáva nám najavo, že celá rovnica bude v obore komplexných čísel. Kto ešte nepočul o komplexných číslach, tak len podotknem, že pre $i$ platí, že jej druhá mocnina je -1. Alebo, inak povedané $i$ je odmocnina z mínus jednotky. Áno, v reálnych číslach nemožné. Komplexné čísla sú totiž nadmnožinou tých reálnych. T.j. každé reálne číslo je aj komplexné, ale nie každé komplexné číslo je reálne.

Toto je len náčrt toho, čo všetko sa matematikovi vynorí v mysli, keď sa na túto rovnicu díva. Kedysi som čítala o experimente, v ktorom ukazovali matematikom výber pekných rovníc a pritom pozorovali aktivitu ich mozgu na magnetickej rezonancii. Zistili, že je rovnaká ako u umelcov sledujúcich veľké umelecké diela. Ja to hovorím stále: *matematika je umenie*. Preto môžem oprávnene nazývať Eulerovu identitu jednou z najkrajších rovníc vôbec.

# Dôkaz platnosti

Neodpustím si ešte krátku poznámku o tom, prečo vlastne táto rovnosť platí. Odvodiť ju nie je úplná banalita. Musíme niečo vedieť nielen o komplexných číslach ale aj o Taylorových rozvojoch funkcií. Taylorov rozvoj je nekonečný súčet, ktorým možno nahradiť pôvodnú funkciu. Sčítancov je v ňom síce nekonečne veľa, ale sú jednoduchšie ako pôvodná funkcia. Taylorov rozvoj alebo Taylorov rad pre exponenciálnu funkciu sem písať nejdem. (Stále píšem z mobilu.) Ľahko si ho vygúglite. A pozrite si pritom aj Taylorov rad pre sínus a kosínus $x$. Čo má s tým spoločné sínus a kosínus? Hm, ako to podať jednoducho? Každé komplexné číslo sa dá napísať v tzv.

goniometrickom tvare: $z = |z|(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$. Komplexné čísla sú tak trochu dvojrozmerné. Aj sa tak zobrazujú. Vodorovná os označuje reálnu časť, zvislá imaginárnu. To $z$ v absolútnej hodnote je vzdialenosť od nuly a uhol $\alpha$ je uhol, ktorý zviera spojnica bodu $z$ s nulou s reálnou osou.

Pomocou tých troch Taylorových radov zistíme, že $e$ umocnené na $i\pi$ je to isté ako $\cos \pi + i \cdot \sin \pi$. To platí pre akýkoľvek uhol, nielen $\pi$. No, a keďže $\pi$ je uhol 180°, jeho kosínus je -1 a sínus nula, hneď vidíme platnosť Eulerovej identity.

Kedysi mi ešte nebolo zrejmé, prečo je 180° práve $\pi$, tak to sem ešte dodám. Uhly sa merajú v stupňoch z historických dôvodov. Vedecky správne je ale merať uhly v radiánoch. Jeden radián je uhol, ktorý zodpovedá oblúčiku dĺžky jeden na jednotkovej kružnici. (To je kružnica s polomerom 1.) Radiánu sa hovorí aj oblúková miera, pretože uhly sú reprezentované dĺžkami oblúčikov na jednotkovej kružnici. A keďže celá kružnica s polomerom 1 má dĺžku $2\pi$, tak je jasné, že jej polovica bude $\pi$ a to je zároveň uhol 180°.

Niečo pekné

Čo dodať? Myslela som, že po mojom príspevku o logaritmických tabuľkách napíšem niečo jednoduchšie. No, nevydalo. 